



INFORME	Identificación: H.6 – 002.01
	Fecha: Diciembre de 2001
TÍTULO ESTADO DEL ARTE SOBRE LA REPRESENTACIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE FLUJO BAJO CONDICIONES DE DENSIDAD VARIABLE	
PROYECTO ESTUDIO DE LA INCIDENCIA QUE SOBRE LAS AGUAS SUBTERRÁNEAS PROVOCA LA INYECCIÓN DESCONTROLADA DE SALMUERAS	
RESUMEN La representación numérica de sistemas hidrogeológicos considerando la variabilidad de la densidad del fluido es un aspecto que no puede soslayarse tanto en estudios de acuíferos costeros como en problemas de almacenamiento profundo de residuos peligrosos. El desarrollo de estos modelos numéricos es una labor compleja y ardua, cuyos resultados no están exentos de una apreciable incertidumbre. Esta tiene su origen en las limitaciones numéricas de la que adolecen los distintos métodos, en la escasez de datos e incertidumbre característica de la información de estos sistemas. Un adecuado conocimiento del código numérico a aplicar, permitirá a los técnicos optimizar los recursos racionalizando debidamente las tareas del estudio. En el presente trabajo se realizó un estado del arte actualizado de la modelización numérica de estos sistemas hidrogeológicos. Se hizo una revisión general de los métodos de representación, que atendió especialmente a las técnicas numéricas, comentándose los aspectos particulares que deben ser atendidos al desarrollar estos modelos numéricos. Se describieron sucintamente los códigos numéricos más destacados y se listaron los ejercicios internacionales de validación de códigos más importantes de las dos últimas décadas, reflexionando sobre las limitaciones que arrojan sus resultados. Finalmente, se comenta en líneas generales acerca de los requerimientos de información de este tipo de modelos.	
Revisión Nombre: Juan Antonio López Geta Unidad: Hidrogeología y Aguas Subterráneas Fecha: Diciembre de 2001	Autor: Javier Heredia Díaz Responsable: José Manuel Murillo Díaz

**ESTUDIO DE LA INCIDENCIA QUE SOBRE LAS AGUAS
SUBTERRÁNEAS PROVOCA LA INYECCIÓN
DESCONTROLADA DE SALMUERAS**

**ESTADO DEL ARTE SOBRE LA REPRESENTACIÓN
NUMÉRICA DE SISTEMAS DE FLUJO BAJO CONDICIONES
DE DENSIDAD VARIABLE**

Diciembre de 2001

El presente informe se ha realizado dentro del Proyecto “Estudio de la incidencia que sobre las aguas subterráneas provoca la inyección descontrolada de salmueras” y ha tenido como objetivo presentar un estado del arte actualizado de la representación numérica en este tipo de problema, actuando como:

Responsable de estudio:

José Manuel Murillo Díaz

Autor del estudio:

Javier Heredia Díaz

El IGME agradece la colaboración de los Servicios de Documentación de la Biblioteca de la Facultad de Ciencias Geológicas de la Universidad Complutense y de la Biblioteca Central del Ministerio de Medio Ambiente que han prestado su inestimable ayuda para obtener la documentación requerida en el estudio y, el autor, quiere agradecer en particular a Margot Gutierrez y Bea García del Servicio de Biblioteca del propio IGME por su diligencia, perseverancia y paciencia en la búsqueda de artículos.

ÍNDICE

I. INTRODUCCIÓN	1
II. ECUACIONES DE ESTADO	5
II.1. LEY DE DARCY	5
II.2. ECUACIÓN DE FLUJO	5
II.3. ECUACIÓN DE TRANSPORTE	7
II.4. APROXIMACIÓN DE GHYBEN-HERBERG	9
III. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN	10
III.1. MÉTODOS ANALÍTICOS	10
III.2. MÉTODOS ANALÓGICOS	11
III.3. MÉTODOS NUMÉRICOS	11
III.3.1. Interfaz neta	13
III.3.2. Densidad equivalente	15
III.3.2.1. Niveles equivalente	15
III.3.2.2. Función de flujo equivalente	16
III.3.3. Densidad variable	18
IV. ASPECTOS PARTICULARES EN LA REPRESENTACIÓN NUMÉRICA	19
V. CÓDIGOS DE REPRESENTACIÓN NUMÉRICA	24
V.1. MOCDENSE	25

V.2. SUTRA.....	26
V.3. METROPOL.....	27
V.4. HST3D.....	27
V.5. MOTIF.....	28
V.6. SIWFT.....	29
V.7. SWICHA.....	29
V.8. FEFLOW.....	30
V.9. MBAEM.....	31
VI. EJERCICIOS USUALES DE VALIDACIÓN.....	31
VII. CONCLUSIONES.....	34
VIII. BIBLIOGRAFÍA.....	35

La casi totalidad de los casos referidos corresponden a problemáticas que demandan una gestión cuidadosa de los recursos hídricos, dado los graves riesgos que entrañan las actuaciones que se emprenden sobre el sistema. Esta gestión debe basarse en un estudio detallado del medio, una capacidad para evaluar su impacto para horizontes futuros, con una incertidumbre aceptable, y un control riguroso de las acciones emprendidas y sus efectos. En todas estas tareas, y aún en las de control, la modelación numérica se presenta como una herramienta de indudable atractivo. Sin embargo, la representación numérica de sistemas de flujo bajo condiciones de densidad variable es compleja y no se halla exenta de limitaciones (Oude Essink y Boekelman, 1998).

La representación numérica de sistemas de flujo bajo condiciones de densidad variable se puede abordar con diversos códigos numéricos, desarrollados bajo distintos métodos de resolución de los problemas directos de flujo y de transporte. No obstante, esta representación numérica se puede abordar a partir de dos aproximaciones: reduciendo todo el sistema a un fluido equivalente –usualmente agua dulce- o representando de forma discriminada las distintas densidades del sistema de flujo. En esta última aproximación los códigos se agrupan entre los que representan al sistema mediante modelos de interfaz neta y los que lo hacen como modelos de densidad variable. La selección de la herramienta a utilizar dependerá como en muchos problemas de modelación del objetivo del estudio, las simplificaciones que se adopten, el conocimiento, los datos disponibles y el presupuesto, entre otros.

Actualmente existe una gran difusión de códigos numéricos de modelización hidrogeológica, encontrándose a disposición de los profesionales del sector diversos programas que permiten representar sistemas de flujo bajo condiciones de densidad variable. Los programas se comercializan a través de distintos distribuidores, y, en particular, sus páginas *web* mantienen actualizada la oferta de *software*. Sin embargo, la modelización numérica de estos sistemas dista de ser una tarea sencilla tanto desde el punto de vista fenomenológico -influencia de la viscosidad, dependencia de esta y de la densidad a la temperatura, concentración de solutos y presión, variación de la permeabilidad-, como numérico -idoneidad de la técnica numérica de representación, problemas de dispersión numérica, adecuación de las condiciones de contorno a adoptar- (Jousma et al., 1988; Oude Essink y Boekelman, 1998). En este sentido, las simplificaciones conceptuales que se adoptan en el desarrollo del modelo numérico deben

ser claramente identificadas, con el fin de evitar que una interpretación estricta de los resultados ofrezca explicaciones reduccionistas de sistemas con un alto grado de complejidad (Groen et. al., 2000). Este hecho no resulta en absoluto banal, dada la delicada gestión que demandan estos acuíferos.

La modelación de los sistemas de flujo bajo condiciones de densidad variables requieren un elevado conocimiento del medio. En particular, en lo referido a información cuantificable: piezometría, salinidad del agua, parámetros hidrogeológicos (permeabilidad, porosidad eficaz, dispersión hidrodinámica, etc.). Asimismo, esta información debe tener una adecuada cobertura espacial y temporal, a pesar que la variación de algunos de los parámetros ejerce una influencia sobre los resultados del modelo que quedan enmascarados por las incertidumbres físicas y numéricas del mismo. Por otro lado, mucho de estos estudios tienen como marco formaciones hidrogeológicas profundas, de geología compleja y que, en general, no suelen haber despertado previamente gran interés en cuanto a su aprovechamiento. En estas razones reside la tradicional falta de datos que suele enfrentar el modelista al abordar estos estudios.

La captura de datos en estos sistemas resulta particularmente exigente por la especificidad de las técnicas que demandan. Algunos investigadores al abordar la modelación de sistemas de flujo bajo condiciones de densidad variable destacan la necesidad de usar un modelo desde el inicio del estudio. Aducen que ello permitiría al modelista estimar la importancia relativa de los distintos parámetros y, en consecuencia, optimizar su tiempo y esfuerzo para obtener los datos apropiados (Jousma et al., 1988). La necesidad de definir al comienzo de un proyecto cual será el código a aplicar en exclusiva para modelar, puede considerarse un requerimiento un tanto extremo. Sin embargo, en este sentido, sí resulta fundamental que el técnico tenga un conocimiento de las posibilidades, limitaciones y requerimientos de los códigos disponibles. Pues ello, conjuntamente con las características particulares del proyecto, permitirá una planificación coherente con las tareas de adquisición de información.

El presente trabajo se estructura de la siguiente forma: en el Capítulo II se exponen las ecuaciones de estado y las lagunas de las principales relaciones algebraicas que resuelven este tipo de modelo; en el Capítulo III se comentan los métodos para estudiar sistemas de flujo bajo condiciones de densidad variable; en el Capítulo IV se abordan aspectos

particulares que se deben abordar en el desarrollo de la modelización numérica de estos sistemas; en el Capítulo V se realiza una breve reseña de los códigos más desatacados en esto estudios; en el Capítulo VI se comentan los principales ejercicio de contraste de códigos y se exponen algunas interesantes reflexiones sobre los mismos; en el Capítulo VII se trata escuetamente el aspecto de los datos que se suelen demandar y en el Capítulo VIII se ofrece un valoración final sobre el desarrollo de estos modelos.

II. ECUACIONES DE ESTADO

II.1. LEY DE DARCY

La Ley de Darcy permite describir el movimiento de un fluido a través de un medio poroso, su generalización en 3D para el caso de flujo bajo condiciones de densidad variable -restringiendo la generalización de Marsily (1983)-, se expresa como:

$$\bar{v} = -\frac{\bar{K}}{\mu} \bullet (\nabla p + \rho g \nabla z) \quad (1)$$

Donde: \bar{v} es la velocidad de Darcy, de componentes v_x , v_y y v_z (LT^{-1}); \mathbf{K} es el tensor de la permeabilidad intrínseca del medio poroso (L^2); μ es la viscosidad dinámica del fluido ($ML^{-1}T^{-1}$); ∇p es el gradiente de presiones de componentes $\partial p/\partial x$, $\partial p/\partial y$ y $\partial p/\partial z$ ($ML^{-2}T^{-2}$); ρ es la densidad del fluido (ML^{-3}) y g , 9.81 m/s^2 , es la aceleración de la gravedad (LT^{-2}).

II.2. ECUACIÓN DE FLUJO

El balance de masa de un fluido para un volumen unitario en una sección dada de un acuífero en régimen transitorio, si se considera la densidad del fluido, es descrita por la siguiente ecuación:

$$\nabla \left(\frac{\bar{K} \rho g}{\mu} \nabla h \right) + \rho^* Q = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2)$$

Donde: Q es el caudal de recarga (L^3T^{-1}); ρ^* es la densidad del fluido inyectado; h es el potencial piezométrico y S_s es almacenamiento específico

El potencial piezométrico, h , se define como:

$$h = \frac{p}{\rho g} + z \quad (3)$$

El almacenamiento específico, S_S , se define (Freeze y Cherry, 1979 en Shikaze et al., 1998) como:

$$S_S = \rho g(\alpha + \theta\beta) \quad (4)$$

Donde: α y θ son la compresibilidad ($L^2T^2M^{-1}$) y la porosidad de la matriz porosa, respectivamente, y β es la compresibilidad del fluido ($L^2T^2M^{-1}$).

El ámbito de estudio de los problemas de densidad variable en muchos casos suele ser el medio fracturado. La ecuación de flujo en régimen transitorio para fracturas discretas unidimensionales tiene la expresión siguiente (Shikaze et al, 1998):

$$(2b) \left[\frac{\partial}{\partial l} \left(K_f \frac{\partial h_f}{\partial l} \right) \right] + q_n|_{l^+} - q_n|_{l^-} = (2b)S_{Sf} \frac{\partial h_f}{\partial t} \quad (5)$$

Donde: $2b$ es la apertura de la fractura (L); l es la distancia a lo largo de la fractura (L); h_f es el potencial piezométrico en la fractura; K_f es la conductividad hidráulica de la fractura; S_{Sf} es el coeficiente de almacenamiento específico de la fractura y $q_n|_{l^+}$ y $q_n|_{l^-}$ representan al flujo normal a la fractura que percolan desde y hacia, respectivamente, la matriz rocosa.

La conductividad hidráulica, K_f , y el coeficiente de almacenamiento específico, S_{Sf} , de la fractura se definen (Freeze y Cherry, 1979 en Shikaze et al., 1998) como:

$$S_{Sf} = \rho_0 g \alpha \quad (6)$$

$$K_f = \frac{(2b)^2 \rho_0 g}{12\mu} \quad (7)$$

II.3. ECUACIÓN DE TRANSPORTE

El balance de masa de un soluto conservativo para un volumen unitario en una sección dada de un acuífero en régimen transitorio, si se considera la variabilidad de la densidad del fluido, es descrita por la siguiente ecuación (Bear, 1979, en Voss y Souza 1987):

$$-\theta \rho \bar{v} \cdot \nabla C + \nabla \left[\theta \rho \left(D_m \bar{I} + \bar{D} \right) \cdot \nabla C \right] + Q_p (C^* - C) = \theta \rho \frac{\partial C}{\partial t} \quad (8)$$

Donde: C es la concentración de soluto como un fracción másica –masa de soluto/masa de fluido- (M_S/M); \bar{v} es la velocidad de Darcy (1); D_m es el coeficiente de difusión molecular del soluto en el flujo, incluye el efecto de tortuosidad del material del acuífero (L^2/T); I es el tensor identidad (-); D es el tensor de dispersión hidrodinámica (L^2/T); Q_p es el caudal de recarga al acuífero dado en términos másicos (M/L^3T); C^* es la concentración de soluto, dada como fracción másica del fluido del caudal de recarga (M_S/M).

La relación entre densidad, ρ , y concentración de soluto, C , en condiciones isotérmicas, se puede expresar mediante la relación lineal siguiente:

$$\rho = \rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial C} (C - C_0) \quad (9)$$

Donde: ρ_0 y C_0 son la densidad y la concentración del soluto en el fluido de referencia, respectivamente, usualmente agua dulce.

Los términos del tensor de dispersión hidrodinámica para un medio anisótropo se definen como:

$$D_{xx} = \alpha_L \frac{v_x^2}{|\bar{v}|} + \alpha_{TH} \frac{v_y^2}{|\bar{v}|} + \alpha_{TV} \frac{v_z^2}{|\bar{v}|} + \tau \bar{D}^* \quad (10.1)$$

$$D_{yy} = \alpha_L \frac{v_y^2}{|\bar{v}|} + \alpha_{TH} \frac{v_x^2}{|\bar{v}|} + \alpha_{TV} \frac{v_z^2}{|\bar{v}|} + \tau \bar{D}^* \quad (10.2)$$

$$D_{zz} = \alpha_L \frac{v_z^2}{|\bar{v}|} + \alpha_{TV} \frac{v_x^2}{|\bar{v}|} + \alpha_{TV} \frac{v_y^2}{|\bar{v}|} + \tau \overline{D^*} \quad (10.3)$$

$$D_{xy} = D_{yx} = (\alpha_L - \alpha_{TH}) \frac{v_x v_y}{|\bar{v}|} \quad (11.1)$$

$$D_{xz} = D_{zx} = (\alpha_L - \alpha_{TV}) \frac{v_x v_z}{|\bar{v}|} \quad (11.2)$$

$$D_{yz} = D_{zy} = (\alpha_L - \alpha_{TH}) \frac{v_y v_z}{|\bar{v}|} \quad (11.3)$$

Donde: v_x , v_y y v_z son los componentes en los ejes X, Y y Z de la velocidad de Darcy, \bar{v} , (1) y $|\bar{v}|$ su módulo; α_L , α_{TH} y α_{TV} son los coeficientes de dispersión longitudinal, transversal en el plano horizontal y transversal en el plano vertical, respectivamente, de la matriz porosa (L); τ es la matriz de tortuosidad y D^* de difusión de la solución libre (L^2/T). En los elementos de la diagonal de la matriz \mathbf{D} -(10.1) a (10.3)- el término del producto τD^* representa al componente de la tortuosidad en la difusión a través del medio poroso.

En fracturas discretas unidimensionales la ecuación de transporte se expresa (Shikaze et al, 1998):

$$(2b) \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(D_f \frac{\partial c_f}{\partial l} \right) - v_f \frac{\partial c_f}{\partial l} \right] + \Gamma_n|_{l^+} - \Gamma_n|_{l^-} = (2b) \frac{\partial c_f}{\partial t} \quad (12)$$

Donde: D_f es el coeficiente de dispersión hidrodinámica longitudinal de la fractura (L^2T^{-1}); c_f es la concentración de soluto en la fractura en términos máxicos (M_s/M); v_f es la velocidad del fluido en el flujo por la fractura (L/T) y $\Gamma_n|_{l^+}$ y $\Gamma_n|_{l^-}$ representan la ganancia y la pérdida, respectivamente, de masa de soluto a través de la matriz porosa en la que se encuentra. En la fractura se asume que el soluto está completamente mezclado en el ancho de la fractura -apertura-.

El coeficiente de dispersión hidrodinámica de la fractura, D_f , se define como:

$$D_f = \alpha_f |\overline{v_f}| + D^* \quad (13)$$

Donde: α_f es la dispersividad longitudinal de la fractura (L).

II.4. APROXIMACIONES DE GHYBEN-HERBERG Y DE HUBBERT

Esta aproximación se basa en el equilibrio hidrostático entre el agua dulce y el agua salada, consideradas como dos fluidos inmiscibles, además se basa en la aproximación de Dupuit, que considera al flujo horizontal. La relación de equilibrio se basa en la relación de las densidades de ambos fluidos - $\rho_d = 1 \text{ kg/dm}^3$, para el agua dulce, y $\rho_s = 1.025 \text{ kg/dm}^3$, para el agua salada- y está dada por la expresión:

$$\rho_d (h + z) = \rho_s z \Rightarrow z = \frac{1}{0.025} h \quad (14)$$

Donde: h y z son el nivel piezométrico y la profundidad de la interfaz respecto al nivel de referencia en el punto de estudio, respectivamente (L) (Custodio y Llamas, 1982).

Hubbert introduce una corrección a la aproximación de Ghyben-Herberg, al considerar la intrusión desde un punto de vista hidrodinámico. Ello resulta una aproximación más cercana a la realidad, pues en la cercanía de la costa debido al estrechamiento de la cuña de agua salada se produce un incremento apreciable de la velocidad de descarga, apareciendo componentes verticales del flujo, dejando de ser válida la aproximación de Dupuit. La expresión de esta aproximación es:

$$z = \frac{\rho_d}{(\rho_s - \rho_d)} h_d - \frac{\rho_s}{(\rho_s - \rho_d)} h_s \quad (15)$$

Donde: h_d y h_s son las cotas de agua dulce y agua salada sobre el nivel del mar, respectivamente, usualmente h_d es negativa. El primer término de la expresión corresponde a la aproximación de Ghyben-Herberg y el segundo a la corrección a realizar. La corrección de Hubbert cobra peso acorde se aproxime la línea de costa. Por otro lado,

existen otras aproximaciones analíticas para el cálculo de la interfaz, tales como las fórmulas de Luszczynsky o la de Glover.

III. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

El problema de densidad variable ha sido abordado mediante técnicas muy diversas. Cada una de las mismas ofrece distintos alcances, a la par de presentar diferentes atractivos.

III.1. MÉTODOS ANALÍTICOS

La resolución analítica de las ecuaciones de estado y su acoplamiento dista de ser un problema sencillo. La complejidad del mismo ha llevado que la mayoría de las soluciones analíticas alcanzadas respondan a problemas de flujo sencillos: acuíferos homogéneos, de espesor y permeabilidades constantes, uni o bidimensionales, régimen permanente, interfaz neta (Ataie-Ashtiani, et al, 1998)-. Esta sencillez de los problemas tratados hace que tengan un interés práctico relativo, a excepción de alguna aproximación. No obstante, las soluciones analíticas resultan de gran interés para el contraste y validación de códigos numéricos, para el análisis de sensibilidad del sistema hidrogeológico respecto a sus parámetros o para una primera aproximación en el estudio de problemas reales.

Algunas soluciones analíticas se basan en la aproximación de Ghyben-Herzberg; en las que la ecuación de flujo se resuelve sólo para el agua dulce, mientras que se considera constante el potencial de agua salada. Así, con este tipo de aproximaciones se han encontrado soluciones para acuíferos horizontales sencillos bajo régimen permanente, también se han encontrado soluciones para un régimen permanente, en un plano vertical, en niveles de agua salada aislados al lado del mar. (Glover, 1959 y Van Der Veer, 1977, en Jousma et al. 1988).

Existen métodos semianalíticos, también basado en la aproximación de Ghyben-Herzberg, que ofrecen posibilidades de aplicación en régimen permanente en diversos casos prácticos, tales como acuíferos confinados, libres o multicapas. Así, en el método de los elementos analíticos el dominio a modelizar se representa por la partir de la composición de una gran variedad de funciones analíticas que representan las distintas influencias sobre el sistema de flujo de fuentes, sumideros, heterogeneidades, etc.. La superposición de estas

funciones permite ofrecer una representación del sistema. En este método la discretización espacial sólo es necesaria para describir la forma de la interfase, a su vez los parámetros de las funciones que la describen deben calcularse iterativamente. Una desventaja de este método es que al incrementarse las funciones que describen el sistema, y con ellos los parámetros a estimar, pierde consistencia el modelo (Strack, 1987, en Jousma et al 1988). Otras soluciones analíticas atienden a casos especiales de flujos en dos fases, basándose en el método de la hodógrafa y la teoría del vórtice (Josseling de Jong, 1965, en Jousma et al. 1988).

III.2. MÉTODOS ANALÓGICOS

Estos modelos se basan en la analogía existente en la ecuación de flujo de las aguas subterránea y las ecuaciones de estado de otros procesos físicos, como es el caso de la electricidad o el calor. Así, si estos procesos físicos se pueden reproducir y medir, los mismos pueden emplearse para estudiar el flujo de las aguas subterráneas. La adecuada interpretación de estos fenómenos físicos requiere la conversión de los parámetros que los gobiernan a los correspondientes parámetros hidrogeológicos. Este tipo de modelo ha caído en desuso en los campos de la investigación y la ingeniería, habiendo quedado constreñido al campo docente. No obstante, debe señalarse, que por lo general, en la mayoría de los casos los modelos analógicos resultan de difícil aplicación para estudiar el transporte de contaminante en el agua subterránea.

III.3. MÉTODOS NUMÉRICOS

Los métodos numéricos permiten resolver de forma discreta en el espacio y el tiempo las ecuaciones de flujo (5) y transporte (8). Estas ecuaciones diferenciales son sustituidas por sistemas de ecuaciones algebraicas que se estructuran a partir de las técnicas de discretización e interpolación que se utilicen. En estos sistemas las incógnitas son los valores nodales de las variables de estado (niveles piezométricos, concentraciones).

Los métodos analíticos permiten describir algunos escenarios que se caracterizan por su homogeneidad y simplicidad, enfrentándose a serias limitaciones al tratar de representar sistemas heterogéneos y relativamente complejos, ello es un serio impedimento para una aplicación con carácter práctico. Los métodos numéricos suelen superar estas restricciones aunque ello no les exime de enfrentar otras dificultades, que se acrecientan notablemente al

abordar procesos de flujo y transporte bajo condiciones de densidad variable. No obstante, algunas de las dificultades en la representación pueden ser evitadas, o al menos controlados sus efectos, con una definición cuidadosa de las discretizaciones tanto espacial como temporal.

La resolución numérica de la ecuación de flujo (5), si se considera a la densidad del fluido constante, no presenta mayor complejidad y se aborda usualmente tanto con el Método de los Elementos Finitos, MEF, como con el de las Diferencias Finitas (MDF). Las posibles dificultades pueden residir en los eventuales aspectos no lineales que entrañe el sistema a representar, tal como la presencia de una superficie libre si la hubiera.

Por el contrario, la resolución numérica de la ecuación de transporte (8), aún bajo condiciones de flujo de densidad constante del fluido, sí se presenta como una empresa compleja. En general para su resolución se aplica alguno de los siguientes métodos:

- **Diferencias Finitas, MDF**, en el que se discretiza el dominio en n celdas y se realiza en cada una de ellas un balance de contaminantes para un intervalo de tiempo dado. Ello se realiza sustituyendo en cada nodo –generalmente situados en el centro de las celdas- los términos diferenciales de la ecuación de transporte por su aproximación. Así queda definido un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, que se resuelve iterativamente. Su implementación difiere en la resolución temporal, según esta se aborde mediante un esquema “centrado” que ofrece mayor exactitud, al tener un menor error de truncamiento, aunque resulta numéricamente más inestable, o que sea “explícito” o “implícito”, ofreciendo ambos esquemas distintos grados de economía de cálculo y estabilidad numérica frente al “centrado” pero también adoleciendo ambos de una menor precisión numérica.
- **Elementos Finitos, MEF**, el dominio se discretiza en elementos de formas diversas, usualmente triangulares o cuadrangulares. A diferencia del MDF, los Elementos finitos calculan las variables de estado en todo el dominio de estudio, utilizando para ello funciones de interpolación –de forma- definidas en cada elemento. Los comentarios realizados respecto a los esquemas de resolución temporal –explícito, centrado e implícitos- son válidos para este método.

- **De las Características, MOC**, en el que en el proceso de transporte se desacoplan los mecanismos advectivos, que se representan mediante partículas características que se desplazan a lo largo de las líneas de flujo, y los procesos dispersivos, que se calculan en la posición que alcanzan las partículas en cada tiempo de cálculo, esto es en un sistema coordinado referido al movimiento advectivo. La resolución secuencial de los términos advectivos y dispersivos de la ecuación contribuye a eliminar en gran medida la dispersión numérica, aunque presentan errores por acumulación de errores de truncamiento.
- **Del Camino Aleatorio**, es también un método de desplazamiento de partículas, pero en éste cada partícula representa un volumen fijo de soluto. El transporte advectivo se produce a lo largo de las líneas de flujo, mientras que el dispersivo corresponde a la suma de un movimiento aleatorio, cuyas características estadísticas dependen de los coeficientes de dispersión. El movimiento de una sola partícula no ofrece ninguna información, sólo la superposición de sus trayectorias y el recuento de las masas que las representan, permiten conocer la concentración de soluto en cada celda. Este método también evita los problemas de dispersión numérica.

La resolución numérica de las ecuaciones de estado de Flujo y Transporte para un sistema de flujo bajo la condición de densidad variable es un problema de gran complejidad numérica, como ya se señalara anteriormente. Para abordarlo se han seguido distintas estrategias, algunas simplifican el cálculo –considerando al agua dulce y a la salobre como inmiscibles o considerando en el sistema un único fluido equivalente- pero limitan el alcance de los problemas a tratar y otras que mantienen la complejidad del problema pero demandan una aún mayor sofisticación de los códigos a emplear y una gran capacidad de los equipos informáticos que soportan el modelo.

III.3.1. Interfaz neta

Los modelos de interfaz neta se basan en considerar al agua dulce y al agua salada como dos fluidos inmiscible que se encuentran separados por una interfaz brusca. La posición de la interfaz en general es calculada mediante la aproximación de Ghyben-Herzberg, por lo que implícitamente se basan en la hipótesis de Dupuit –flujo preponderantemente horizontal, estratificado-. Sin embargo, dentro de este tipo de modelo también se inscribe el método de los elementos analíticos de Strack (1987,1995), en el que la ubicación de la

interfaz se realiza mediante funciones especiales, aunque la implementación de este método presenta una capacidad de simulación limitada (Oude Essink y Boekelman, 1998).

Los métodos de interfaz neta se basan en suponer un equilibrio hidrostático, donde el flujo es de carácter estratificado y, fundamentalmente, en la inmiscibilidad del agua dulce y del agua salada. Sin embargo, en la realidad estos fluidos son miscibles y la zona de transición suele caracterizarse por estar sujeta a dispersión hidrodinámica (Bouzouf et al, 2001). El hecho que los modelos de interfaz neta no consideren la mezcla por dispersión y difusión es una limitación particularmente restrictiva. Algunos autores señalan que este rasgo afecta particularmente a la simulación de actividades antrópicas, como la recarga artificial y la extracción o inyección de aguas con caudales altos y variables –por ejemplo ISP o ASR- (Oude Essink y Boekelman, 1998). No obstante, esta limitación resulta restrictiva también para una simulación realista y detallada de procesos de intrusión, ubicación de la cuña marina o el estudio de descarga de acuíferos confinados. En estos casos no sólo no se representaría la zona de mezcla convectiva sino que la ubicación de la cuña podría llegar a subestimarse su penetración o, en el caso de la descarga mar afuera de acuíferos confinados, sobrestimar las descargas. Este último hecho ha sido cotejado tanto por mediciones en campo como por contraste con modelos densidad variable (Groen et al., 2000, Kooi y Groen, 2001). Asimismo, estos modelos no serían adecuados de aplicar en casos en que la dispersividad se viera acrecentada por la heterogeneidad del acuífero, flujos lentos del agua subterránea o efectos de marea (Ataie-Ashtiani et al., 1998)

Los modelos de interfaz suelen ser más sencillos que los de densidad variable y requieren menos datos y tiempo de cálculo. El empleo de este tipo de método se adecua para obtener soluciones rápidas y globales, tales como primeras aproximaciones en estudios regionales o en estudios locales o de detalle en los que la disponibilidad datos y recursos es limitada. Igualmente, en acuíferos en los que la zona de transición es relativamente pequeña comparada con la extensión y la potencia del acuífero resultan un escenario adecuado para aplicar estos modelos (Bouzouf et al, 1998). En el 16th salt Water Intrusion Meeting se han presentado dos modelos similares basados en la hipótesis de la estratificación del flujo, en los que se identificaba la interfaz neta mediante la aplicación del método de los volúmenes finitos (Bouzouf, et al, 2000), en un caso, y las diferencias finitas en 3D (Bakker, 2000), en el otro.

III.3.2. Densidad equivalente

Los modelos de densidad equivalente se basan en la representación del sistema bajo un único fluido de referencia, el cual usualmente es el agua dulce. Debido a ello el fluido resulta continuo y sus propiedades son constantes en todo el dominio. Existen dos aproximaciones diferentes, en una las ecuaciones se resuelven en términos de función de corriente y, en la otra, en términos de potencial hidráulico. Sin embargo, debe observarse que contrastes realizados entre este tipo de modelos y los de densidad variable puso en evidencia que los resultados de los mismos pueden diferir notablemente al identificar las velocidades y direcciones de flujo (Kelly y Bair, 1988). En ambas aproximaciones, la franja de transición se puede simular definiendo escalones de variación de la densidad, representándose así de forma discreta la evolución de la densidad del fluido en este sector del sistema. Este tratamiento discreto de la evolución espacial del fluido lleva aparejado el asumir que se mantiene la conservación de la masa en los distintos escalones, no habiendo mezcla de fluido a través de las distintas interfaces. Situación que, en rigor, sólo se produce en régimen estacionario, con lo que se pone de evidencia otra gran limitación de estas aproximaciones: la imposibilidad de simular el régimen transitorio. Asimismo, y al igual que las restantes técnica numéricas, la zona de transición demanda una partición espacial de detalle.

III.3.2.1. Niveles equivalente

El régimen estudiado se simula en términos de potencial de agua dulce. Si se escribe la velocidad de Darcy (1) en término de carga hidráulica equivalente, se tiene:

$$h_e = \frac{p}{\rho_0 g} + z \Rightarrow p = \rho_0 g (h_e - z) \quad (16)$$

y

$$\bar{v} = -\frac{\bar{K}}{\mu} \bullet (\rho_0 g \nabla h + (\rho - \rho_0) g \nabla z) \quad (17)$$

Donde : h_e es la carga hidráulica equivalente; p es el potencial del sistema de flujo en un punto dado y ρ_0 es la densidad del fluido de referencia, usualmente agua dulce. La

expresión (17) permite interpretar que en estos casos el flujo en el medio poroso se halla gobernado por dos fuerzas: 1, la variación del nivel piezométrico, referido a un fluido ficticio homogéneo de densidad, ρ_0 , y una fuerza ascensional causada por la diferencia entre la densidad real del flujo, ρ , y la correspondiente al fluido ficticio, ρ_0 (Senger y Fogg, 1990 a y b; Gupta y Bair, 1997)). La influencia de esta fuerza ascensional en los campos de flujo equivalentes se puede apreciar claramente en la ecuación de flujo en 2D para régimen estacionario. Si se definen una densidad relativa, ρ_r , y la conductividad hidráulica equivalente K_e , como:

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \quad (18)$$

$$K_e = \frac{k\rho_0 g}{\mu} \quad (19)$$

La ecuación de flujo en un plano vertical para régimen estacionario se escribe:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{ex} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{ez} \frac{\partial h}{\partial z} + K_{ez} \rho_r \right) = 0 \quad (20)$$

La componente vertical del flujo en la ecuación (20) viene dada por el gradiente hidráulico en la dirección del eje Z y por la fuerza ascensional debido a la variación de la densidad del fluido.

La interfaz entre los dos fluidos significa una discontinuidad en las propiedades del sistema de flujo. Esta singularidad se representa con la introducción de las fuerzas ascensionales en la componente vertical del flujo, con lo que se causa un salto en el potencial a lo largo de la interfaz. En términos prácticos, esto se puede traducir en el acoplamiento de un término de empuje hidrostático a la componente vertical del flujo (Van Meir et al, 2000).

III.3.2.2. Función de flujo equivalente

Una función de flujo, Ψ , es constante a lo largo de una línea de corriente y la diferencia entre ellas, $\Psi_i - \Psi_{i-1}$, se corresponde a la descarga entre dos líneas de corriente. Cuando se

emplean funciones de flujo para problemas de densidad variable, estas deben definirse en términos de flujo máscicos y, también en este sentido, debe desarrollarse la ecuación de flujo. Una forma más general de escribir la ecuación de continuidad, considerando la variación de densidad, ρ , es:

$$\nabla \rho \bar{q} = 0 \quad (21)$$

Donde: \bar{q} es el caudal en el plano del campo de flujo.

Si se trabaja con funciones de flujo en términos de volumen de flujo y no de masa se pueden generar errores significativos en el campo de flujo que se obtenga como solución de problema (Senger y Fogg, 1990 a y b; Evans y Raffensperger,1992; Lebbe y Van Meir,2000). Esto errores incrementarán su magnitud en la medida que el gradiente de densidades, $\nabla \rho$, tienda a ser paralelo a las líneas de flujo. Ello se pone en evidencia de forma clara, si se desarrolla (21):

$$\nabla \rho \bar{q} = \rho \nabla \cdot \bar{q} + \bar{q} \cdot \nabla \rho \quad (22)$$

reagrupando:

$$\nabla \cdot \bar{q} = -\frac{\bar{q} \cdot \nabla \rho}{\rho} \quad (23)$$

Así, el segundo miembro de la ecuación será igual a 0 cuando el caudal, \bar{q} , sea ortogonal al gradiente de la densidad, $\nabla \rho$. Evidentemente, también se aprecia que cuanto menor sea el contraste en la variación del fluido, menor será la distorsión al representar con un fluido homogéneo al sistema de flujo.

En problemas de 2D, este método permite observar de forma bastante intuitiva la magnitud y velocidad del flujo. Por otro lado, la aplicación del mismo en los términos convenientes garantiza el principio de conservación de la masa, aún cuando no se haya alcanzado la convergencia numérica (Evans y Raffensperger,1992). Estos investigadores, y otros

(Olsthorn, 2000), coinciden en señalar en que las soluciones numéricas de este método suelen ser más estables y converger más rápidamente que las resultantes del estudiar el campo de flujo equivalente en términos de presiones o niveles. Asimismo, el uso de funciones de flujo equivalente evita los problemas del cálculo en convección libre, en donde los errores por discretización pueden ser mayores que los gradientes de presiones existentes.

Una restricción de este método es su aplicación al régimen estacionario. Así, si bien se puede estudiar la evolución histórica de escenarios mediante “fotos fijas” (Olsthorn, 2000), ello impide su uso ante la presencia de bombeos u otra acción análoga sobre el sistema, en la que deba considerarse el almacenamiento del mismo. Entre otras restricciones se debe señalar lo compleja que resulta su extensión a problemas en 3D. Una limitación conceptual notoria de este tipo de modelos radica en su calibración, pues al no ser mensurable la función de flujo, la misma debe ser inferida a partir de otras variables de campo tales como caudales de descarga, presiones o niveles.

La representación de fuentes y sumideros, aún en régimen estacionario, resulta engorrosa de implementar. La misma se realiza imponiendo términos a la función de corriente que generan saltos en la misma reflejando con estos las discontinuidades que implican las fuentes y sumidero en el campo de flujo.

III.3.3. Densidad variable

Considerar en la simulación numérica la variabilidad de la densidad, además de ofrecer una representación más realista es, en muchos sistemas, un requerimiento ineludible por las características del problema estudiado, por ejemplo en condiciones en que la franja de transición es extensa y debe estudiarse en detalle la gestión del recurso (Lahm et al, 1998). Para ello, algunos modelos resuelven las ecuaciones de flujo (2) y transporte (8) considerando de forma explícita la variación de la densidad, a la que suelen hacer variar linealmente en función de las concentraciones en condiciones isoterma –aunque existen códigos que consideran la influencia de la temperatura-. La ecuación de transporte, aún en condiciones de densidad constante, resulta particularmente compleja su resolución numérica debido a su término advectivo -hiperbólico-.

La representación numérica si bien ofrece un tratamiento más realista de los sistemas, y con ello un innegable atractivo, también lleva aparejado en el desarrollo de los modelos una serie de requerimientos y restricciones que obligan a operar con particular atención. En este aspecto ciertas conceptualizaciones de los sistemas, las condiciones de contorno que de ellas se deriven y el método numérico de resolución deben valorarse convenientemente (Konicow, et al 1997 y Holzbecker et al., 1997). Igualmente, una discretización relativamente simple puede generar artificialmente velocidades de flujo (Voss y Souza,1987). Por otro lado, estos modelos son particularmente exigentes en cuanto a requerimientos de datos del sistema hidrogeológico.

IV. ASPECTOS PARTICULARES EN LA REPRESENTACIÓN NUMÉRICA

La resolución numérica de la ecuación de transporte en el dominio de estudio es inherente a la modelación del correspondiente sistema de flujo bajo condiciones de densidad variable. Debido a ello la problemática que presente la modelación del problema de transporte deberá ser abordada en este tipo de modelo. En este sentido el primer aspecto a considerar es la representatividad de la ecuación de transporte. Carrera (1985) realiza una reseña de los distintos aspectos por lo que se puede cuestionar la aplicación general de la expresión dada para la ecuación de transporte (8): interdependencia real de los procesos de transporte, dependencia de la dispersividad con la escala del problema analizado, entre otros. En particular, en sistemas de flujo bajo condiciones de densidad variable se establece una interdependencia entre el campo de velocidades y la dispersión, que incide de forma negativa para representar adecuadamente la posición y amplitud de la zona de transición (Croucher y O'Sullivan, 1995) Sin embargo, como señala Carrera (1985) –augurando muchos años de uso a esta formulación-, la resolución de la expresión (8) permite simular situaciones reales, en claro contraste con las alternativas formuladas.

Existen dos magnitudes adimensionales que contribuyen a la caracterización del problema de transporte y, que a su vez, deben ser referencia al definir las discretizaciones espacial y temporal. Estas son:

• el Número de Peclet,
$$P_e = \frac{v\Delta x}{D_l} = \frac{\Delta x}{\alpha_l} \quad (24)$$

• el Número de Courant,
$$C_o = \frac{v\Delta t}{\Delta x} \quad (25)$$

Donde: Δx es una distancia media entre nudos o centros de celdas; D_l es el coeficiente de dispersión longitudinal; Δt es un intervalo de tiempo de cálculo; α_l es la dispersividad longitudinal y $|v|$ es el módulo la velocidad darciana. El número de Peclet, P_e , evalúa la importancia relativa entre los procesos de transporte advectivos y dispersivos. Así, si $P_e < 1$ predominan los proceso dispersivos, siendo preponderante en la ecuación de transporte el término parabólico, y si $P_e > 1$ los procesos advectivos son los relevantes, cobrando peso en (8) el término hiperbólico. El número de Courant, C_o , indica la relación entre la distancia recorrida por el soluto debido al transporte advectivo durante un intervalo de tiempo de cálculo y la discretización espacial del problema. Resulta evidente la utilidad de ambos números al definir las discretizaciones espacial y temporal del problema.

Los modelos eulerianos -en los que se resuelve la ecuación de transporte mediante métodos como diferencias finitas o elementos finitos- ofrecen soluciones estables para el problema de transporte, cuando los procesos dispersivos son preponderantes sobre los advectivos y el frente de soluto es relativamente suave (Carrera, 1985). Para números de Peclet altos se pueden producir fuertes oscilaciones en la solución, ello se evita si se cumplen las condiciones empíricas siguientes:

$$P_e \leq 2 \quad (27a)$$

$$C_o \leq 1$$

, algunos autores (Oude Essink y Boekelman, 1998) consideran que si se emplean el MEF con funciones de interpolación cuadráticas la condición a cumplir es

$$P_e \leq 4 \quad (27b)$$

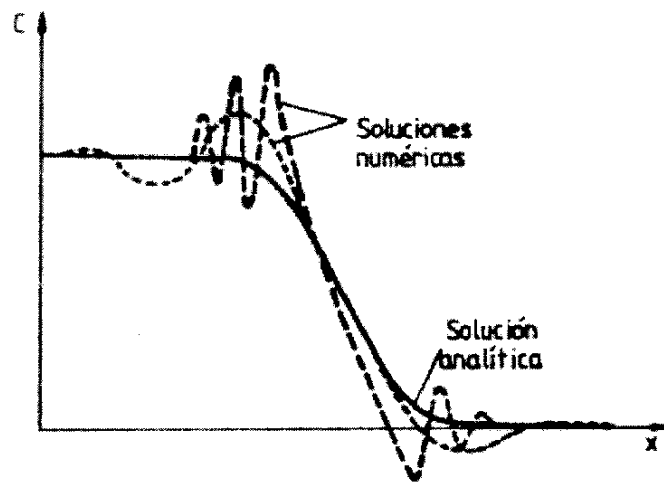
Sin embargo, aunque la verificación de la condición (26) evita oscilaciones en la solución numérica (ver Figura 1a), en algunos casos puede llevar a particiones espaciales extremadamente finas y la consiguiente definición de intervalos de tiempo de cálculo muy

pequeños. Así, se puede dar el hecho que la solución pierda exactitud por acumulación de errores de redondeo (Neuman, 1983, en Carrera, 1985). Por otro lado, un esquema de cálculo “hacia atrás” que brinda estabilidad al problema, puede conducir a un suavizado artificial del frente de contaminante e introducir un error de truncamiento, haciendo perder precisión numérica a la solución (ver Figura 1b). Este tipo de error produce una dispersión numérica que impide una correcta representación del fenómeno físico, al “esparcir” el frente brusco del soluto de una forma aún mayor a la producida por la dispersión hidrodinámica misma. Así, en modelos de intrusión marina se vería incrementada la amplitud de la zona de transición y distorsionada la posición de la cuña de penetración (Coucher y O’Sullivan, 1995). El incremento artificial en la dispersión que introduce la dispersión numérica es proporcional a la distancia entre nudos del mallado (Carrera, 1985). Sin embargo, como ya se señalara, estos errores no sólo se encuentran relacionados con la discretización que se defina, sino con el esquema de resolución que se adopte, según este sea implícito, centrado o explícito.

La definición de las condiciones de contorno adecuadas es un aspecto que no está exento de dificultad en este tipo de modelo. Así, la definición de la condición de concentración prefijada puede implicar la existencia de un flujo másico dispersivo sobre el que se tiene poco control y que puede distorsionar la representación del sistema. En referencia a esto se produjo una interesante discusión en torno al Caso 5 del Nivel 1 del ejercicio internacional HYDROCOIN -Hydrologic Code Intercomparison- (Konikow et al, 1997; Holzbecher et al., 1998). En la misma, se señala que los métodos mixtos lagrangianos-eulerianos como el de Partículas Características o el de Caminos Aleatorios representan con una menor dispersión numérica que los métodos eulerianos, los problemas en que la advección es el proceso preponderante en el transporte de soluto. Debido a ello los métodos mixtos resultan los más adecuados para implementar la condición de concentración prefijada –tipo Dirichlet-, cuando esta se define en un modelo. Por otro lado, en esta discusión también se desalienta a utilizar la condición de concentración prefijada debido a que su analogía estricta en la naturaleza es una rareza (Konikow et al., 1997), considerándose más pertinente el empleo de la condición de contorno mixta –tipo Cauchy-.

La simulación del transporte advectivo necesita aproximar 2 vectores: el gradiente de la concentración y la velocidad. Frente a los problemas usuales de flujo de ρ constante donde la velocidad varía suavemente, en los problemas bajo ρ variable –tal como el de intrusión

marina o de ISP- el campo de velocidades suele ser altamente variable. La velocidad se calcula a partir de las presiones y densidades evaluadas en los nudos o celdas (1). Si la ρ es constante la presión sólo varía linealmente, pero si la ρ varía linealmente en vertical la presión lo hará cuadráticamente. Por otro lado, si bien la ρ es variable en un sistema, al discretizarse este, la ρ pasará a ser constante para cada nodo o celda. Debido a ello, el error de truncamiento asociado a la velocidad que afecta notablemente al cálculo de la misma, dependerá de la discretización espacial que se adopte y su reducción requerirá refinar el mallado.



a) Oscilaciones.

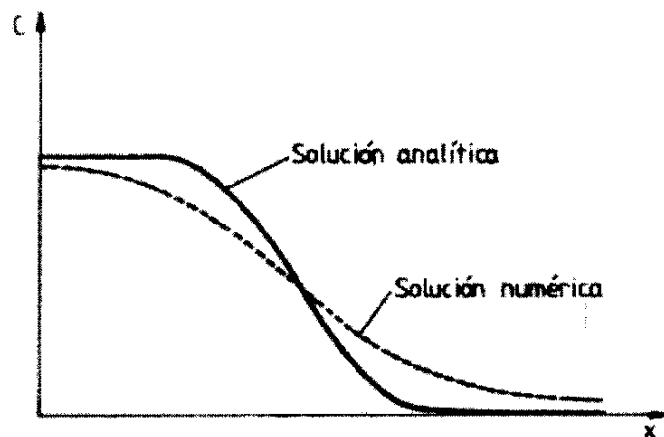


Figura 1- Efectos de dispersión numérica (de Carrera, 1985)

códigos de modelación de sistemas de flujo bajo condiciones de densidad variable, cabe la salvedad que algunos de los códigos comentados, si bien ofrecen resultados promisorios, se hallan en fase de desarrollo. La información que se extracta procede en término generales de las referencias ya dadas (Waterloo Hydrogeologic, 2001; IGWMC, 1999; SSG, 2001), de la relación general de modelos realizada por Heredia (1991) –debidamente actualizada-, el análisis restringido de códigos del mismo autor (Heredia, 1999) y las publicaciones particulares que se referencian pertinentemente.

V.1. MOC DENSE

Este código desarrollado por Sandford y Konicow (1985) es una versión modificada del programa **MOC** desarrollado por Konikow y Bedoehoeft en el marco del U.S. Geological Survey para poder representar sistemas de flujo bajo densidad variable en 2D, ya sea en horizontal o en vertical. Se resuelven los problemas de flujo y transporte en regímenes estacionario y transitorio, la ecuación de estado del primero se resuelve mediante el método las diferencias finitas, usando tanto presiones como niveles hidráulicos. El transporte advectivo se representa mediante el método de las características y se pueden simular al menos hasta tres solutos o constituyentes solubles. La densidad y la viscosidad se consideran linealmente variables con la concentración de uno de los constituyentes exclusivamente y son independientes de la presión y temperatura. Así se pueden representar problemas de contaminación en ambientes heterogéneos y anisotrópicos con agua dulce/agua salobre. Actualmente, las dimensiones máximas con que se puede representar un sistema son: un mallado de 150 por 150 celdas, 80000 partículas características y 25 puntos de observación. El código tiene recursos de posproceso que facilitan la interpretación del modelo. Este código fue utilizado en un ejercicio de contraste entre métodos lagrangianos-eulerianos y eulerianos, representando una implementación de los primeros (Benson et al. 1998). Este ejercicio, cuyos resultados se comentarán más adelante, puso en evidencia la economía de calculo que aportan estos métodos, aunque limitada esta a campos donde la velocidad evoluciona suavemente. Existe una adaptación tridimensional del código **MOC** para flujo y transporte de soluto considerando la densidad del fluido variable, este es el código **MOC DENSE3D** y fue desarrollado por Oude Essink (1999). En el 16th SWIM se han presentado varios trabajos en el que se aplico este código y en los que los resultados resultan de sumo interés (Oude Essink, 2000; Van Meir et. al., 2000;. Lebbe y Van Meir, 2000).

V.2. SUTRA

Este código fue desarrollado por Voss (1984) y, al igual que MOC DENSE, en el marco del U.S. Geological Survey. SUTRA puede simular en los problemas de flujo y transporte en 2D, ya sea en horizontal o en vertical. Para ello se resuelven numéricamente mediante un método híbrido de elementos finitos y diferencias finitas integradas las respectivas ecuaciones de estado. Este método es robusto y preciso si las discretizaciones espaciales y temporales son las debidas, en la definición de estas última se aplica un esquema implícito. Las velocidades se calculan por un método de segundo orden, ello le incrementa la precisión, en particular, al cálculo del transporte advectivo. El flujo se simula bajo condiciones de densidad variable del fluido y el transporte de energía térmica o de sólidos disueltos en medio poroso saturado, no saturado, anisótropo y heterogéneo, en régimen estacionario o transitorio. Las variables de estado con las que opera son la presión hidrostática, p , y uno de los siguientes, la temperatura, t , o la concentración de soluto, c , según el problema que se simule. Las variables de estado deberán ser definidas en todos los nudos al establecer las condiciones iniciales del modelo. En la modelización del transporte de solutos disueltos en agua subterránea se pueden incluir procesos de sorción (3 modelos) en equilibrio con la matriz porosa, el de decaimiento, los de producción de primer orden y de orden cero, de advección, dispersión y difusión. El transporte de energía térmica se considera tanto en el flujo subterráneo como en la matriz sólida del acuífero. Las condiciones de contorno –entre los que se incluyen los términos fuentes/sumideros– que se imponen pueden adoptarse como dependientes del tiempo. Actualmente, existen versiones del código con interfaces con el usuario muy desarrolladas y compatibles con herramientas informáticas de pre y posproceso que facilitan y aportan seguridad al trabajo del modelista. Este código ha sido validado con los problemas de Henry –intrusión marina– (1964) y el de flujo radial con transporte de solutos o energía térmica hacia un pozo (Gelhar and Collins, 1971, en Heredia, 1991), de los que se conoce su solución analítica. Asimismo, ha sido utilizado en muchas ocasiones para desarrollar el modelo de referencia en los procesos de contraste de distintos código. SUTRA fue aplicado en el ya referido ejercicio de contraste entre métodos lagrangianos-eulerianos y eulerianos, representando a los segundos (Benson et al. 1998). Este código se utiliza ampliamente en los complejos problemas de flujo de densidad variable, como estudios de intrusión marina (Mushtaha et al. 2000), efectos de mareas en acuíferos costeros (Ataie-Ashtianiet al., 1999) o sobre paleoaguas (Koesters et

al., 2000). **WATSUTRA** es una versión modificada de SUTRA y fue desarrollado por J. Vander Kwaak en el marco del Waterloo Center of Groundwater Research, durante los años 1995-96 (Lahm et al., 2000). Este código se diferencia del SUTRA básicamente en dos aspectos numéricos: 1, el acoplamiento del programa WatSOLV que incrementa la rapidez y eficiencia en la resolución de grandes sistemas de ecuaciones y 2, no puede utilizar los nudos que permiten representar las discontinuidades en las capas. Igualmente, se han desarrollado pre y posprocesadores específicos para este último código. La mejora introducida en su capacidad de cálculo ha permitido la aplicación del mismo para simular grandes sistemas regionales y períodos de tiempos extensos (Lahm and Bair, 1997a y b, 2000 y Lahm et al. 1998).

V.3. METROPOL

Este código fue desarrollado por el Instituto Nacional Holandés de Salud Pública y Protección Ambiental (Sauter et. al, 1983, en Oude Essink y Boekelman, 1998). Simula el flujo de agua subterránea bajo condiciones de densidad variable y el transporte simultáneo de contaminantes, para ello resuelve numéricamente las ecuaciones mediante el Método de los Elementos Finitos. Se ha aplicado para evaluar la seguridad de los almacenamientos profundos de residuos radioactivos en formaciones salinas y problemas de intrusión marina en acuíferos costeros regionales (Groen et al., 2000).

V.4. HST3D

El HST3D fue desarrollado por K. Kipp Jr en el marco del US Geological Survey, su principal usuario (Kipp, 1987, en Heredia, 1992; SSG, 2001). El código simula el flujo bajo condiciones de densidad y viscosidad variables, transporte térmico y de solutos en acuíferos anisótropos y heterogéneos, en condiciones posibles de confinamiento, semiconfinamiento y libre y para regímenes estacionario y transitorio. El transporte de solutos considera los procesos de advección, dispersión, difusión, sorción y decaimiento lineal, disolución salina y lixiviación. El código permite considerar la densidad del fluido en función de la concentración de soluto. Se pueden desarrollar modelos tridimensionales, aunque sólo se puede representar la zona saturada y el medio poroso. La resolución numérica de las ecuaciones de estado de flujo y transporte térmico y de solutos se realiza mediante el Método de las Diferencias Finitas. Las variables de estado son la presión, temperatura y la concentración de soluto. Las condiciones de contorno, inclusive los

representar tridimensionalmente un medio poroso saturado, anisótropo y heterogéneo. Respecto al problema de transporte de soluto, la adsorción se representa mediante una isoterma de equilibrio y la desintegración se describe mediante una constante de desintegración de primer orden. El código discretiza el dominio con el método de los elementos finitos, usando elementos triangulares y rectangulares. Las ecuaciones de estado se resuelven mediante el método de Galerkin y en la resolución temporal se adopta un esquema de intervalos de Crank-Nicholson. Los sistemas de ecuaciones se resuelven secuencialmente mediante un esquema de relajación en láminas sucesivas (SSQR). La no linealidad se resuelve por el procedimiento iterativo de Picard. Las condiciones de contorno que se pueden definir, tanto en flujo como en transporte, son las de Dirichlet y Neumann, pudiéndosele definir las correspondientes evoluciones temporales. Este programa presenta un recurso interesante para hacer frente a las oscilaciones en los resultados de la ecuación de transporte, el cual consiste en añadir una dispersión numérica (Oude Essink y Boekelman, 1998).

V.8. FEFLOW

El autor principal de FEFLOW fue J. Diersh, quien lo desarrolló en el marco de Institute for Water Resources Planning and Systems Research, Ltd, WASY (Diersh,1997). Este modelo permite simular los problemas de flujo, bajo condiciones de densidad y viscosidad variables, y transporte de calor y de solutos, tanto para régimen estacionario como transitorio. Asimismo, estos problemas los puede representar en zona saturada y zona vadosa, considerando las eventuales heterogeneidades del medio y las anisotropías. La discretización espacial la realiza mediante el Método de los Elementos Finitos. Los procesos de transporte que se consideran son los de advección, sorción isotérmica lineal y no lineal, difusión molecular, dispersión hidrodinámica y decaimiento. Las condiciones de contorno que se pueden aplicar en ambos problemas son las de Dirichlet, Neumann y Cauchy, considerando una eventual variación temporal. Las ecuaciones las resuelve aplicando el método de Gradientes Conjugados Precondicionados. La resolución de los problemas no lineales la aborda mediante técnicas iterativas de Picard y Newton y pasos de tiempo adaptativos. Posee recursos de modificación automática del mallado, con el fin evitar los clásicos problemas de dispersión numérica de los métodos eulerianos. Este código tiene desarrollada una potente interfaz gráfica, que facilita el trabajo interactivo y es de gran utilidad en las labores de pre y pos proceso. En el marco de estos recursos, el

FEFLOW tiene una estrecha vinculación con el SIG ARC/INFO, que permite la transferencia directa de información en ambos sentidos. Igualmente, entre los resultados que ofrece este código, se debe señalar los balances tanto hídricos como máxicos y que pueden comprender todo el dominio modelado como subzonas del mismo.

V.9. MBAEM

Este código a diferencia de los anteriormente presentados permite elaborar un modelo analítico del sistema estudiado. Este ha sido desarrollado por Strack (1995, en Oude Essink y Boekelman, 1998) a partir del modelo analítico MLAEM, el que se amplió con un módulo de densidad variable. La descripción que se realiza a continuación es un extracto de la realizada por Oude Essink y Boekelman (2000), según traducción de Javier Custodio. MBAEM permite calcular la distribución tridimensional de presiones en el sistema de flujo, de forma tal que pueda conocerse la distribución de densidades en 3D en un acuífero. En la actualidad, este código presenta algunos inconvenientes: no es posible simular la dispersión hidrodinámica y la anisotropía y sólo representa el régimen permanente. El desplazamiento de los puntos con densidades a través de velocidades de flujo conocidas no se había resuelto hasta la publicación del citado artículo., así no es posible simular la intrusión de agua salada en función del tiempo. Otra limitación que se vislumbra es que el interpolador multicuadrático-biarmónico que emplea para obtener la distribución tridimensional de la densidad en el acuífero y para controlar la suavidad y la evolución espacial de la distribución, puede no ser lo suficientemente robusto en todos los casos. Por otro lado, De Lange (1996) aplicó el método de los elementos analíticos para desarrollar el **NAGROM** -National Groundwater Model-, para sistemas acuíferos con densidad variable en los Países Bajos.

VI. EJERCICIOS USUALES DE VALIDACIÓN

Un aspecto básico en el desarrollo de los códigos es la validación de los mismos, para lo cual se contrastan el grado de dispersión numérica que presentan o la eficiencia del código en cuanto a la representación numérica de la conceptualización de un sistema, entre otros aspectos. En la validación de modelos Van Der Heijde (1985, en Jousma et al, 1988) discrimina, quizás algo esquemáticamente, tres niveles diferentes:

- **Nivel 1;** se utilizan soluciones analíticas para depurar los programas, verificar globalmente la técnica numérica aplicada y contrastar aspectos particulares de la misma. Las comprobaciones van desde problemas simples monodimensionales, hasta problemas más complejos con soluciones analíticas.
- **Nivel 2;** comprobaciones en que se abordan tanto problemas teóricos como resultados de pruebas de laboratorio, analizando la respuesta del modelo al representar heterogeneidades, anisotropía, etc.
- **Nivel 3;** en este nivel la validación aborda la modelización de sistemas reales con datos de campo con el debido detalle.

El conocido problema de Henry (1964) muy utilizado en la validación de códigos en 2D de densidad variable, que representa un problema sintético de un acuífero confinado que sufre intrusión marina y del cual se conoce la solución analítica, se corresponde al Nivel 1.

Por otro lado, desde mediados de los 80 y durante la última década de la pasada centuria se han desarrollado una serie de ejercicios internacionales de verificación y contraste de códigos numéricos. En breve reseña (Heredia, 1991) se destacan los siguientes:

- **CHEMVAL/MIRAGE (CHEmical VALidation/MIgration of RADionuclidos the GEosphere):** su objetivo es la validación de códigos geoquímicos y de transporte. Coordinado por W.K. Atkins and Partners y organizado por la CEE.
- **HYDROCOIN (HYDROlogic COde INtercomparison):** Su objetivo es la comparación de códigos de flujo hidrogeológico. El ejercicio considera 3 niveles: Nivel 1, verificación de códigos; Nivel 2, validación de los mismos y Nivel 3, análisis de sensibilidad e incertidumbre en los cálculos. Coordinado por SKI y desarrollado en el marco de la OCDE/NEA.
- **INTRACOIN (INTernational RADionuclide transporte COde of INtercomparison):** Su objetivo es la comparación de códigos de transporte de solutos. El ejercicio considera 3 niveles: Nivel 1, verificación de códigos; Nivel 2, validación de los mismos y Nivel 3, análisis de sensibilidad e incertidumbre en los cálculos. Coordinado por SKI y desarrollado en el marco de la OCDE/NEA.

- **MIRAGE** (**MI**gration of **RA**dionuclidos the **GE**osphere): su objetivo es intercomparar códigos geoquímicos y de transporte. Coordinado por Atkins R&D y organizado por la CEE.

En la polémica suscitada en torno al Caso 5 del Nivel 1 del ejercicio HYDROCOIN (Konikow et al, 1997; Holzbecher et al. 1998), ya referenciada en capítulos anteriores, Konikow realiza una serie de interesantes reflexiones acerca de este tipo de ejercicios y sobre la valoración de los resultados que alcanzan. Así, partiendo de la premisa que los ejercicios de comparación de modelos son convenientes, observa que sus resultados deben ser convenientemente sopesados en cuanto a que reflejen la bondad de un código frente a los otros. Debido a la complejidad de los ejercicios que muchas veces se plantean, la exactitud de la solución se halla más estrechamente ligada con el modelo conceptual definido o la escala de discretización adoptada que con el método numérico con que se aborda la solución o la implementación que haga del mismo el código testeado.

Bajo esta perspectiva crítica Konikow también plantea acertadamente que el uso de la media de las soluciones como base o referente en la comparación puede hacer que el modelista olvide o pierda perspectiva respecto a la diferencia entre exactitud y precisión. Por lo que, si la “solución” es significativamente diferente respecto a la media de las soluciones numéricas, entonces existirá un sesgo que refleja una pérdida de exactitud. Mientras que la desviación de un modelo individual respecto a la media sólo es una medida de la precisión de dicho modelo y, si bien la precisión de un modelo es deseable, esta es insuficiente como medida de verificación. Así, en rigor, los ejercicios de contraste entre modelos en los que no existe una solución analítica o “real” deberían llamarse “ejercicios de referencia” más que de verificación. Estrictamente, la comparación de resultados es en primer lugar una valoración de la consistencia del modelo antes que una evaluación de la exactitud del mismo.

Konikow en el último artículo de la citada polémica adopta una postura algo extrema, pero con observaciones no exentas de rigor. Así, sugiere que ninguno de los problemas de HYDROCOIN debería ser tomado como ejercicio de verificación de códigos numéricos; debido que al desconocerse la solución correcta de un ejercicio, se desconoce también si algún código la alcanza. Por otro lado, no obstante, aún si se conociera la solución correcta y que algún modelo la reprodujera, ello no prueba que el código utilizado sea el correcto -

“el exacto”- y que el mismo ofreciera soluciones igualmente exactas para otros problemas, o aún para el mismo pero con una discretización espacial o temporal distinta a la utilizada.

VII. CONCLUSIONES

La representación numérica de sistemas hidrogeológicos considerando la variabilidad de la densidad del fluido es un aspecto que no puede soslayarse tanto en estudios de acuíferos costeros como en problemas de almacenamiento profundo de residuos peligrosos. Un adecuado conocimiento de cualquiera de estos sistemas y una cierta capacidad de evaluación de su evolución ante posibles actuaciones es fundamental para la gestión de los recursos hídricos, análisis de seguridad o estudios de impacto ambiental. El desarrollo de estos modelos numéricos es una labor compleja y ardua, cuyos resultados no están exentos de una apreciable incertidumbre. La misma tiene su origen no sólo en las limitaciones numéricas de la que adolecen los distintos métodos, sino también de la escasez de datos y la incertidumbre que caracteriza a la información de estos sistemas hidrogeológicos. Debido a ello, y a que las distintas técnicas numéricas ofrecen alguna ventaja o alguna limitación respecto a las demás, es importante que los técnicos tengan un adecuado conocimiento del código numérico a aplicar, para poder desarrollar las actividades del estudio, ya sea en campo o gabinete, optimizando los recursos.

En el presente trabajo se realiza un estado del arte actualizado de la modelización numérica de estos sistemas hidrogeológicos, en pos de ello se expone la algoritmia básica que debe resolverse. Se realiza una revisión general de los métodos, haciendo particular hincapié en la descripción de las técnicas numéricas. Posteriormente, se comentan los aspectos particulares que deben atenderse al desarrollar estos modelos numéricos. En este sentido se aborda, entre otros, el tema de la dispersión numérica, como afecta a la discretización espacial que se define y la distinta repercusión que tiene en cada método numérico. Asimismo, se trata la idoneidad de cada método para representar las posibles condiciones de contorno del modelo o la necesidad de considerar la incidencia de la viscosidad en la representación. Se describen sucintamente los códigos numéricos más destacados, detallando autores, técnicas de resolución de las ecuaciones, alcance de los mismos, validaciones realizadas y reseña de los ejercicios o proyectos en que participaron. Se listan

los ejercicios internacionales de validación de códigos más importantes de las dos últimas décadas, reflexionando sobre las limitaciones que arrojan sus resultados. Finalmente, se comenta en líneas generales acerca de los requerimientos de información de estos modelos.

VIII. BIBLIOGRAFÍA

Ataite-Ashtiani, B.; Volker, R. and Lockington, D. (1999). "Tidal effects on sea water intrusion in unconfined aquifers". *Journal of Hydrology*, Vol. 216, 1-2. Pp. 17-31

Bakker, M. (2000). "Simple groundwater flow models for seawater intrusion". *Proceedings of the 16th Salt Water Intrusion Meeting –SWIM-*. P.19-24.

Bachu, S. (1995). "Flow of variable-density formation water in deep sloping aquifers; review of methods of representation with case studies". *Journal of Hydrology*, Vol. 164, nº 1-4. Pp.19-38.

Bear, J. (1979). "Hydraulics of groundwater", Mc Graw Hill, New York. USA. 567 p.

Benson, D.; Carey, A. Wheatcraft S. (1998). "Numerical advective flux in highly variable velocity fields exemplified by saltwater intrusion". *Journal of Contaminant Hydrology*, Vol 34, nº 3. Pp. 207-233

Bouzouf, B.; Ouazar, D.; Himi, M. and Casas, A. (2000). "Salt water modeling and simulation of Llobregat Delta Aquifer". *Proceedings of the 16th Salt Water Intrusion Meeting –SWIM-*. Pp. 33-38.

Carrera, J. (1985). "La modelación del transporte de contaminantes en acuíferos: Métodos de Análisis y proceso de estudio. Aplicación a un caso real. Ponencia en la conferencia sobre Hidrología General y Aplicada, SMAGUA 85. Pp. 151-175.

Croucher, A. and O'Sullivan (1995). "The Henry problem for saltwater intrusion". *Water Resources Research*. Vol. 31, nº 7. Pp. 1809-1814.

Custodio, E. y Llamas M. R. (1983). "Hidrología Subterránea"(2º Edición), Editorial Omega. Barcelona

De Josseling de Jones, G. (1965). "A many valued holograph in an interface problem". *Water Resources Research*. Vol 1, nº4.

De Lange, W. (1996) "Grounwater modeling of large domains with analytical elements" Ph.D. Thesis. Delft University of Technology.

De Marsily, G. (1986) "Quantitative Hydrogeology. Groundwater Hydrology for Engineers". Academic Press Inc.. San Diego, CA. 440 p.

Diersch, H.-J. G. (1997). "Interactive, graphics-based finite element simulation system FEFLOW for modeling groundwater flow, contaminant mass and heat transport processes. User's Manual Version 4.7". WASY, Institute for Water Resources Planning and Systems Research, Ltd.. Berlin, Germany.

Evans, D. and Raffensperger, J. (1992) "On the stream function for the variable density groundwater flow". Water Resources Research, Vol 28, n° 8. Pp. 2141-2145.

Freeze, R. and Cherry, J. (1979). "Groundwater". Prentice-Hall. Englewood Cliffs. NJ. 604 pp.

Gelhard, L. and Collins, M. (1992) "General analysis of longitudinal dispersion in nonuniform flow". Water Resources Research, Vol 7, n° 7. Pp. 1511-1521.

Glover, R. (1959). "The pattern of freshwater flow in a coastal aquifer". Journal of Geophysical Research. Vol 64, n°4.

Groen, J.; Kooi, H.; Post, V. and De Vries, J.J. (2000). "Fresh and moderately brackish groundwater in coastal plains and continental shelves: past and ongoing natural processes". Proceedings of the 16th Salt Water Intrusion Meeting –SWIM-. Pp. 73-80.

Gupta, N. and Bair, S. (1997). "Variable-density flow in the Midcontinent basins and arches region of the United States". Water Resources Research, Vol. 33, n° 8. Pp. 1785-1802.

Henry, H. (1964). "Effects of dispersion on salt encroachment in coastal aquifers". Sea Water in Coastal Aquifers. U. S. Geological Survey. Water Supply Paper. Vol. 1613-C. Pp 70-84.

Heredia, J. (1991), "Caracterización mediante técnicas numéricas de medios de baja permeabilidad". Documento n° 3: "Reseña de códigos numéricos en hidrogeología". Informe interno. Consejo de Seguridad Nuclear.

Heredia, J. (1999). "Valoración y propuesta de configuración: SIG-Código de Vínculo-CNMH". Memoria, Tomo 3. Proyecto: Síntesis hidrogeológica y modelización regional de un área granítica de la cuenca del Tajo. Informe final para ENRESA. Cod: 95-SHMR-IF.

Holzbecher, E.; Konikow, L.; Sanford, W. and Campbell, P. (1997). "Constant-concentration boundary condition: Lessons from the HYDROCOIN variable-density groundwater benchmark problem. Comment and Reply" Water Resources Research, Vol. 34, n° 10. Pp.2775-2780.

IGWMC (1999). "Groundwater software catalog". International Ground Water Modeling Center. Colorado School of Mines. Golden, CO 80401-1887. USA.

Jousma, G.; Thorgborg, B. and Verrujit A. (1988). "Modelación de la Intrusión marina. Revisión de métodos". TIAC'88, Tecnología de la Intrusión en Acuíferos Costeros. Volumen I: Estado del arte a nivel nacional e internacional. Pp. 229-290.

Kelly, M. and Bair, S. (1988) "Difference in hydrodynamic interpretations based on equivalent freshwater heads versus variable-density heads". Geological Society of America, 1988 annual meeting. Abstracts with Programs, 20; 2, P. 103.

Kipp, K. L.Jr. (1986). "HST3D A computer Code formulation of heat and solute transport in three-dimensional groundwater flow systems". IGWMC-UGGS, Water Resources Investigations Report 86-4095.

Koesters, E.; Vogel, P. and Schelkes, K. (2000). "A paleohydrogeological approach to regional density-dependent groundwater modeling: A case study in Northern Germany". Proceedings of the 16th Salt Water Intrusion Meeting –SWIM. Pp.103-110.

Kooi, H. and Groen, J. (2001). Offshore continuation of coastal groundwater systems, prediction using sharp-interface approximation and variable-density flow modelling". Journal of Hydrology. Vol. 246, 1-4. Pp. 19-35.

Konikow, L.; Sanford, W. and Campbell, P. (1997). "Constant-concentration boundary condition: Lessons from the HYDROCOIN variable-density groundwater benchmark problem" Water Resources Research, Vol. 33, n° 10. Pp.2253-2261.

Lahm, T. and Bair, S. (1997a) "The influence of regional despresseurization in a salinity-derived variable-density groundwater environment". Geological Society of America, 1997 annual meeting. Abstracts with Programs, 29; 6, P. 75.

Lahm, T. and Bair, S. (1997b) "Role of salinity-derived variable-density flow in the displacement of brine from shallow, regionally extensive aquifer ". Geological Society of America, 1997 annual meeting. Abstracts with Programs, 29; 6, P. 75.

Lahm, T. and Bair, S. (2000) "Regional despresseurization and its impact on the sustainability of freshwater resources in an extensive Midcontinent variable-density". Water Resources Research, Vol. 36, n°11. Pp. 3167-3177.

Lahm, T.; Bair, S. And Vander Kwaak, J. (1998) "Role of salinity-derived variable-density flow in the displacement of brine from shallow, regionally extensive aquifer ". Water Resources Research, Vol. 34, n°6. Pp. 1469-1480.

Lebbe, L. and Van Meir, N. (2000). "Sensitivity analyses of pumping test in salt-fresh water aquifer 2: drawdown and joint confidence regions". Proceedings of the 16th Salt Water Intrusion Meeting –SWIM-. Pp.151-160.

Lester, B. (1991). "SWICHA. A three-dimensional finite element code for analysing seawater intrusion in coastal aquifers. Version 5.05". Geo-Trans, Inc., Sterling Virginia, USA. IGWMC, Delft, Netherlands.

- Mushtaha A.; Amjad S. A. and Mackay (2000). "The use of scavenger wells to control saltwater upconing in Gaza, Palestine". Proceedings of the 16th Salt Water Intrusion Meeting –SWIM-. Pp.109-116.
- Neuman, S. (1983). "Computer prediction of subsurface radionuclide transport – An adaptive numerical methods" Nuclear Regulatory Commission Report. N°, nureg/cr-3076.
- Osenkoppele, H. (1993) " Modeling the distribution and the movement of fresh, brackish and saline groundwater in the sand-dune area of Amsterdam Waterworks". (en neerlandes). M. Sc. Thesis at the Delf Universty of Technology. 411 p.
- Olsthorn, T.N. (2000) "Brackish-saline water movement in the southern part of the Amsterdam Dune Water Area, 1925-2025". Proceedings of the 16th Salt Water Intrusion Meeting –SWIM-. Pp.119-126.
- Ophori, D. (1997). "A numerical simulation analyses of viscosity invariable-density flow of groundwater". Geological Society of America, 1997 annual meeting. Abstracts with Programs, 29; 6, P. 75.
- Ophori, D. (1998a). "Flow of groundwater with variable density and viscosity. Atitokan Research Area, Canada". Hydrogeological Journal of Hydrology, Vol. 6, n° 2. Pp. 193-203.
- Ophori, D. (1998b). "The significance of viscosity and density-dependent flow of groundwater". Journal of Hydrology, Vol. 204, n° 1-4. Pp. 261-270.
- Oude Essink, G.H. (1998). "Density dependent groundwater at the island of Texel, The Netherlands". Proceedings of the 16th Salt Water Intrusion Meeting –SWIM. Pp.47-54.
- Oude Essink, G.H. (1999). "Simulating density dependent groundwater flow: the adapted MOC3D". Proceedings 15th Salt Water Intrusion Meeting-SWIM. Ghent, Belgium. Pp69-79.
- Oude Essink, G.H. (2000). "Density dependent groundwater at the island of Texel, The Netherlands". Proceedings of the 16th Salt Water Intrusion Meeting –SWIM. Pp.47-54.
- Oude Essink, G. H. y Boekelman, R. H. (1998). "Problemas con el modelado a gran escala de la intrusión de agua salada en 3D" Traducción Custodio, J.. Boletín Geológico y Minero. Vol. 109-4. Pp.: 4-403 a 4-420.
- Sandford, W. E. and Konikow, L.F. (1985). "MOC DENSE. A two constituent solute-transport model for groundwater having variability density". USGS, Water Resources Investigations Report 85-4279.
- Sauter, F.; Leijnse, A. and Beusen, A. (1993). "METROPOL. User's Guide. Report Number 725205.003. National Institute of Public health and Environmental Protection. The Netherlands. 102 p.
- Senger, R. and Fogg, G. (1990a). "Stream functions and equivalent freshwater heads for modelling regional flow of variable-density groundwater; 1, Review of theory and verification". Water Resources Research, Vol. 26, n° 9. Pp. 2089-2096.

Senger, R. and Fogg, G. (1990b). "Stream functions and equivalent freshwater heads for modelling regional flow of variable-density groundwater; 2, Application and implications for modeling strategy". *Water Resources Research*, Vol. 26, n° 9. Pp. 2097-2106.

Schincariol, R. (1998). "Dispersive mixing dynamics of dense miscible plumes: natural perturbation initiation by local-scale heterogeneities". *Journal of Contaminant Hydrology*, Vol. 34, n° 3. Pp. 247-271.

Shikaze, S.; SudickY, E. and Schartz F. (1998). "Density-dependent solute transport in discretely-fractured geologic media; is prediction possible". *Journal of Contaminant Hydrology*, Vol. 34, n° 3. Pp. 273-291.

Strack, O. (1987). "Groundwater mechanics". Prentice Hill, N.J.

Strack, O. (1995). "A Dupuit-Forcheimer model for three dimensional flow with variable density". *Water Resources Research*. Vol. 31, n° 12. Pp.3007-3017.

SSG (2001). "Environmental Software and Publications. Catalog". Scientific Software Group. P.O. Box 23041, Wsashington, DC, 20026-3041

Van Der Heijde, P. (1987). "quality assurance in computer simulations of groundwater contamination". *Environmental Software*. Vol. 2.

Van Meir, N.; Lebbe, L. and Oude Essink G.H.P. (2000). "Sensitivity analyses of pumping test in salt-fresh water aquifer 1. Concentration changes". *Proceedings of the 16th Salt Water Intrusion Meeting –SWIM-*. Pp.141-150.

Van Der Veer, P. (1977). "Analytical solution for steady interface flow in a coastal aquifer involving a phreatic surface with precipitation". *Journal o Hydrology*. Vol. 34. Pp.1-11.

Voss, C.I. and Souza, W. (1987). "Variable density flow and solte transport simulation of regional acuífers containing narrow. Freshwater-saltwater transtion zone". *Water Resources Research*, Vol 23, n° 10. Pp: 1851-1866.

Voss, C.I. (1984). "SUTRA. A finite element, fluid-density-dependent groundwater flow eith energy transport or chemically reactive single-species solute transport". USGS, *Water Resources Investigations Report 84-4369*.

Ward, D.S. (1991). "Data input for SWIFT v.2.50". *Geo-Trans Technical Report*. Sterling, Virginia, USA.

Waterloo Hydrogeologic, (2001). "Groundwater Software Bulletin". Waterloo Hydrogeologic, Inc..180 Columbia St. W.- Unit 1104. Waterloo, Ontario, Canada